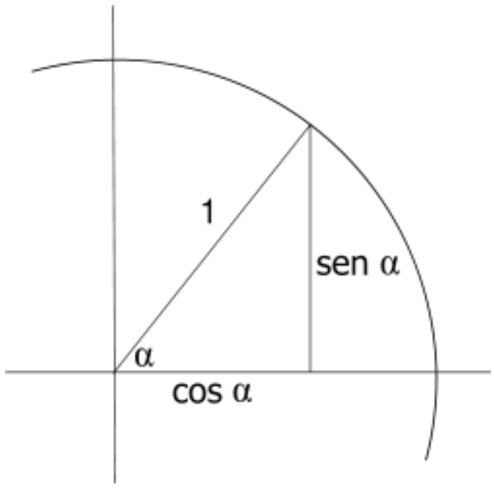
TRABAJO DE INVESTIGACIÓN SOBRE LA TRIGONOMETRÍA



REALIZADO POR: Coral Gutiérrez del Anillo
Azahara Jiménez
Alba Morillo

I.E.S. ANTONIO LÓPEZ GARCÍA. CLASE 4ºA

ÍNDICE

1. HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA

1.1. LA CULTURA BABILÓNICA, EGIPCIA Y GRIEGA ANTIGUA

Manejaron aspectos prácticos relacionados con la trigonometría. Medidas de ángulos en grados sexagesimales, realización de algunas construcciones

(túnel de Samos), orientación de templos de modo que un cierto día del año el Sol iluminara el santuario consagrado al dios....

1.2. ERATÓSTENES

Calculó el radio de la Tierra con notable precisión por métodos trigonométricos.

1.3. HIPARCO

La búsqueda de la precisión para prever eclipses y para construir calendarios eficientes les llevó a dichas civilizaciones a una sistematización de sus observaciones y al intento de una matematización de las mismas.

Este proceso lo culmina Hiparco con la construcción de unas auténticas tablas trigonométricas.

1.4. PTOLOMEO Y EL ALMAGESTO

Con el fin de afrontar problemas astronómicos construyó una minuciosa tabla trigonométrica desde 0º a 180º y explicó cómo utilizarla para construir triángulos.

1.5. HINDÚ

Motivados por la astronomía...

<u>Vaharamira:</u>

Dividió en 120 unidades el radio.

<u>Aryabhata:</u>

Asoció la semicuerda a la mitad del arco de la cuerda completa. Introdujo un radio de 3438 unidades, obtenido de:

· Asignar 360 x 60 (minutos) a la circunferencia.

· Usando la fórmula: $C = 2\Pi r$

Vieron que el seno de 30º era 1719

Se usaron las identidades de forma algebraica y con cálculos aritméticos sobre las relaciones algebraicas.

1.6. ÁRABE

Su trigonometría es más aritmética que geométrica.

Para calcular valores usaban $\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$

Los astrónomos árabes introdujeron la tangente y la cotangente.

Abû'l-Wefâ introdujo la secante y la cosecante como longitudes de un trabajo de astronomía.

Los árabes tomaron como punto de partida la astronomía de Ptolomeo.

1.7. RENACENTISTA

Motivada por la navegación, el cálculo del calendario y la astronomía, los alemanes llevaron a cabo nuevos trabajos en trigonometría a finales del siglo XV y principios del siglo XVI.

<u>George Peurbach:</u>

Hizo tablas trigonométricas más precisas.

<u>Johannes Müller:</u>

Continuó el trabajo de Peurbach. Construyó una tabla de senos basada en un radio de 600.000 unidades y otra basada en un radio de 10.000.000 unidades. También construyó una tabla de tangentes.

<u>Pitiscus:</u>

La palabra <<trigonometría>> es suya.

<u>Regiomontano:</u>

Reunió el conocimiento disponible en trigonometría plana, geométrica esférica y trigonometría esférica. Obtuvo la ley de los senos para triángulos esféricos:

$$\frac{\text{sen a}}{\text{sen A}} = \frac{\text{sen b}}{\text{sen B}} = \frac{\text{sen c}}{\text{sen C}}$$

1.8. GRIEGA

La trigonometría fue una creación de Hiparco, Menelao y Ptolomeo. El fundador de ésta fue Hiparco.

La trigonometría griega alcanzó una alta cota con Menelao.

La trigonometría esférica fue la primera en ser desarrollada.

1.9. CULTURA INDIA Y ÁRABE

En los tratados de astronomía indios se exponen las funciones seno y coseno. Los árabes tomaron de al cultura india estas funciones, así como sus inversas, cosecante y secante y describieron la tangente y la cotangente.

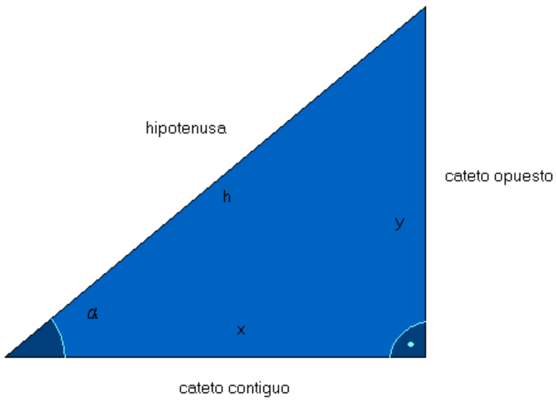
1.10. OCCIDENTE LATINO

A través de los árabes españoles, la trigonometría se introdujo en el occidente latino a partir del siglo XIII.

2. TRIGONOMETRÍA PLANA

2.1. DEFINICIÓN DE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS:

Dado el triángulo rectángulo de la figura adjunta, se define:



1. El **seno del ángulo** α es la razón entre el cateto opuesto al ángulo α y la hipotenusa.

sen α = $\frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$, sen α = $\frac{y}{h}$; **Cosecante,** cosec α = $\frac{1}{sen\ \alpha}$

2. El **coseno del ángulo** α es la razón entre el cateto contiguo al ángulo α y la hipotenusa.

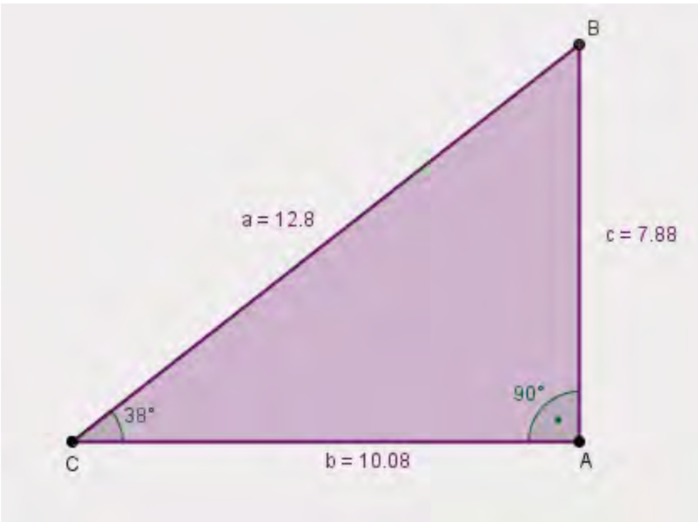
cos α = $\frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa}$, cos α = $\frac{x}{h}$; **Secante**, sec α = $\frac{1}{\cos\alpha}$

3. La **tangente del ángulo** α es la razón entre el cateto opuesto y el cateto contiguo.

tg α = $\frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo}$, tg α = $\frac{y}{x}$; **Cotangente**, cotg α = $\frac{1}{tg\ \alpha}$

2.2. CONSERVACIÓN DEL sen α, cos α y tg α

Siendo el seno de un ángulo α la relación entre el cateto opuesto y la hipotenusa, el coseno de un ángulo α la relación entre el cateto contiguo y la hipotenusa y siendo la tangente de un ángulo α la relación entre el cateto opuesto y el cateto contiguo, se puede deducir que estas relaciones no dependen del triángulo dado, sino del ángulo α al que nos referimos.



Para poder ver este dibujo de forma interactiva:
http://esdelibro.es/archivos/trabajos07/200700075_trigonometria/conservacion_del_seno.html
Este dibujo se ha creado Geogebra 2.7.1.0 que es un software libre que puede distribuirse y modificarse libremente bajo licencia GNU (© Markus Hohenwarter, director del proyecto, idea y desarrollo desde 2001 y por Yves Kreis, promotor desde 2006)
http://www.geogebra.at

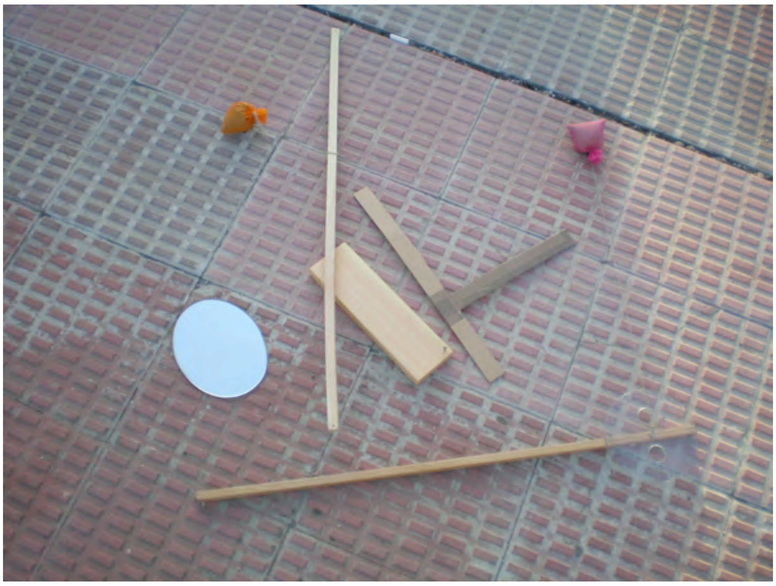
2.3. ALGUNAS APLICACIONES

- ASTRONOMÍA : cálculo del radio de la Tierra, distancia de la Tierra a la Luna, distancia de la Tierra al Sol, predicción de eclipses, confección de calendarios...
- CARTOGRAFÍA: elaboración de un mapa de un lugar del que se conocen algunas distancias y algunos ángulos.
- NAVEGACIÓN: construcción de cartas marinas en las que se detalle la ubicación de escollos, arrecifes...
- OBRA: ingeniería civil y edificación.
- CATASTROS: delimitación de límites de una parcela.
- SIG: sistema de información geográfica.
- TELEDETECCIÓN: imágenes de satélite.
- FOTOGRAMETRÍA: representación de los objetos reales a partir de imágenes fotográficas.
- TOPOGRAFÍA INDUSTRIAL

3. EXPERIENCIA DE CAMPO

El objetivo de la experiencia es medir la altura del edificio de nuestro centro con distintos instrumentos y comparar la media de dichas mediciones con la altura real. Dicha altura se conseguirá con una estación total cedida por la Escuela de Ingenieria en Topografía Geodesia y Cartografía. (Véase anexo I)

3.1. MEDICIÓN DE LA ALTURA CON DISTINTOS INSTRUMENTOS

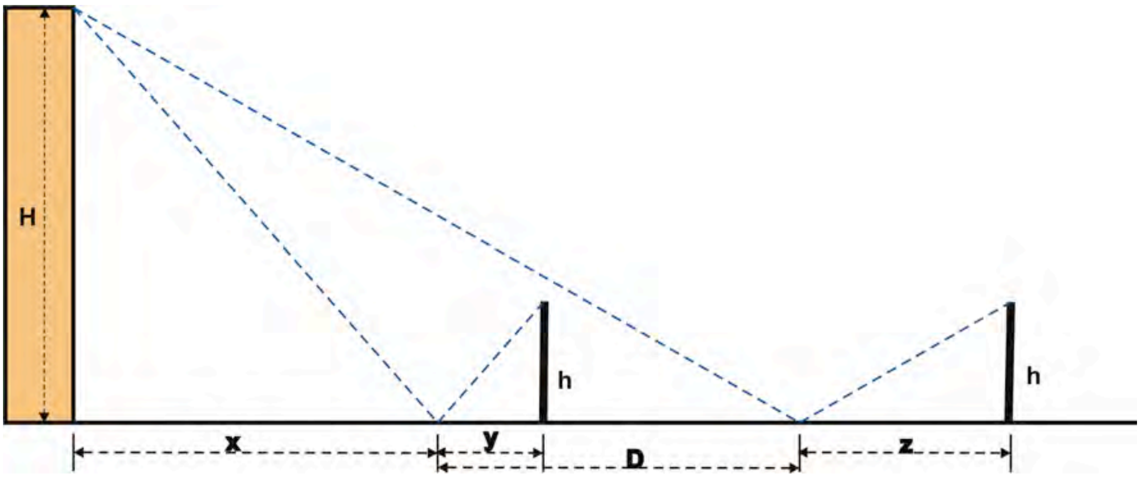


3.1.1. Con un espejo.

Material: Se utilizó un espejo con forma de elipse y se marcó sobre él el eje principal.

Para medir la altura de un edificio con el espejo procedemos así:

a) Se sitúa el espejo en el suelo horizontal del patio a una distancia aleatoria.
b) Se sitúa el observador a una distancia del espejo de forma que en él se vea reflejado el filo del edificio sobre el eje principal.
c) Se aleja el espejo una distancia conocida y el observador vuelve a hacer la medición.



En la figura, por semejanza de triángulos, se observa:

$$\frac{H}{x} = \frac{h}{y} \qquad (1)$$

$$\frac{H}{x + D} = \frac{h}{z} \qquad (2)$$

Despejando **x** de la igualdad (1), se tiene:

$$x = \frac{H}{h}y$$

Sustituyendo el valor de **x** en la igualdad (2), se obtiene:

$$H = \frac{h}{z}\left(\frac{H}{h}y + D\right) = \frac{h(Hy + hD)}{h\,z} = \frac{Hy + hD}{z}$$

de donde:

$$Hz = Hy + hD$$
$$(z - y)H = hD$$
$$H = h\frac{D}{z - y}$$

3.1.2. Con una varilla y un goniómetro.

Material: listón de madera, transportador de ángulos de 360º, hilo de cáñamo, dos hembrillas, bolsita llena de arena y un tornillo.
Construcción del aparato:

1. Cortar una pieza de madera de 80 x 1 x 1 cm y barnizarla.

2. Colocar dos hembrillas en cada extremo acercándose lo máximo al borde de la pieza.

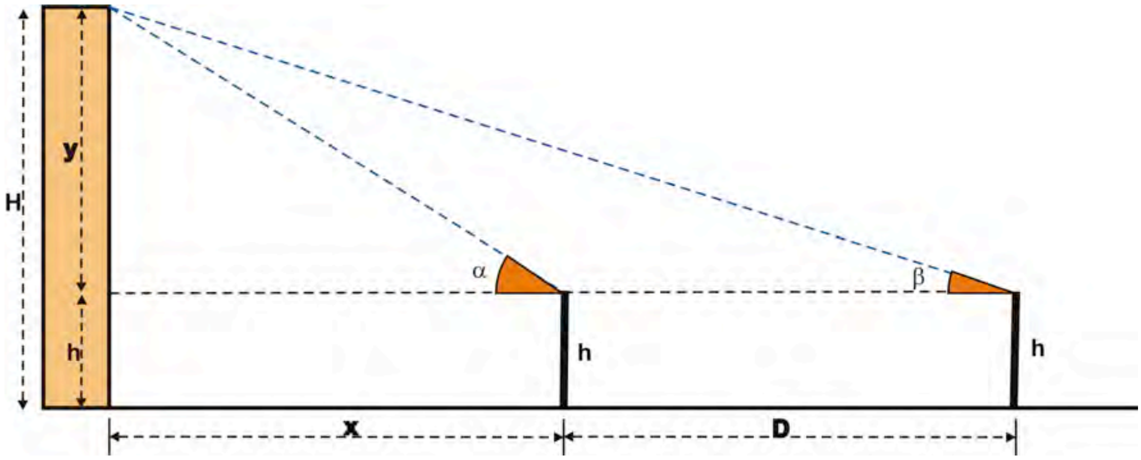
3. Hacer el agujero del transportador de ángulos de 360º más grande.

4. Atornillar el transportador al listón a la distancia del radio de éste y atar la bolsita de arena que usamos como plomada al tornillo. El transportador se coloca con el 0º coincidiendo con el extremo del listón, para que así quede paralelo al suelo y el hilo de cáñamo al que está unido la plomada, marque la amplitud del ángulo que se forma al elevar el listón.

Para medir la altura del edificio procedemos de la siguiente forma:

a) Se sitúa el observador a una distancia aleatoria de la fachada y dirige la varilla apuntando por las hembrillas a la parte superior del edificio.
b) Otro observador lee el ángulo que señala en el goniómetro la cuerda con la plomada.
c) Los observadores se alejan del edificio una distancia conocida y vuelven a hacer la medición.

d) Se obtienen así dos ángulos de elevación y con ellos se puede calcular la altura del edificio.



En la figura se observa:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \qquad [1]$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{x + D} \qquad [2]$$

Despejando **y** de la igualdad [1] se obtiene:

Y = x tg α [3]

Despejando **y** en la igualdad [2] se obtiene:

y = (x + D) tg β [4]

Igualamos las ecuaciones [3] y [4]:

x tg α = (x + D) tg β
x tg α = x tg β + D tg β
x tg α − x tg β = D tg β
x (tg α − tg β) = D tg β

$$x = \frac{D \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$$

3.1.3. Con un altímetro de cartón

Material: se utilizó un trozo de cartón para construir dos listones de la siguiente forma:

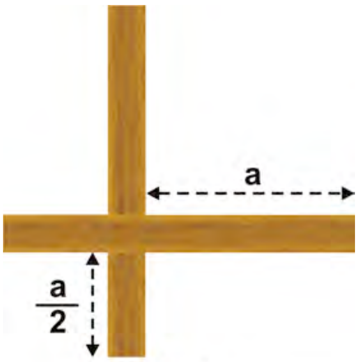


Fig. 1

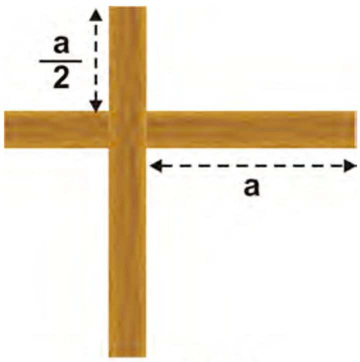
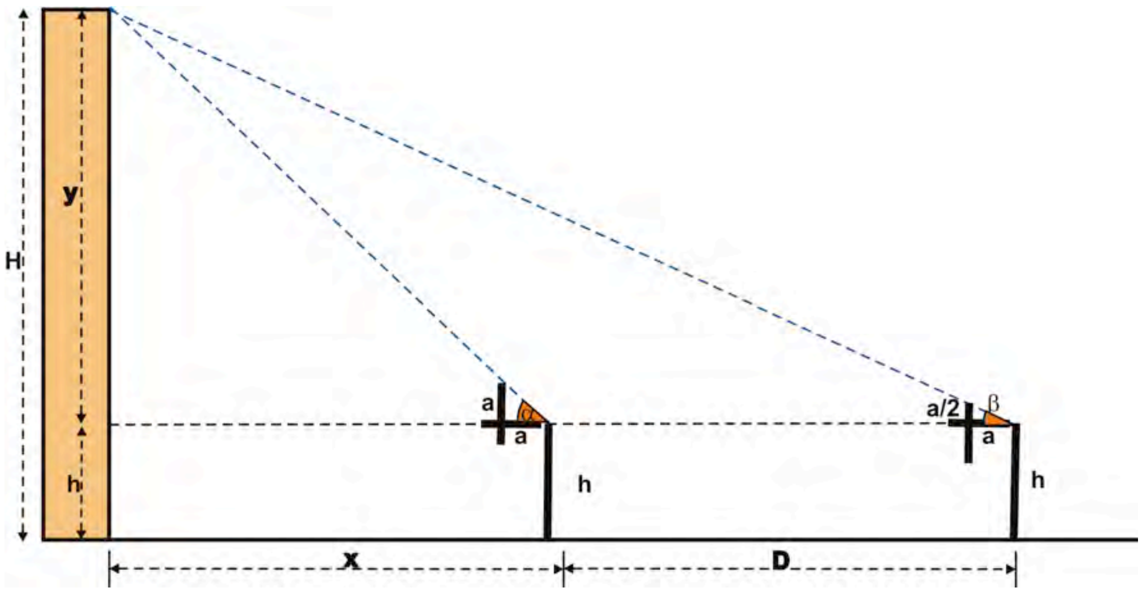


Fig. 2

Para medir la altura del edificio procedemos de la siguiente forma:

a) Se sitúa el observador a una distancia aleatoria de la fachada y con ayuda de la plomada dirige el altímetro en la posición de la figura 1 de forma que apunta desde un extremo a otro con la parte superior del edificio.



b) Giramos 180° la pieza de forma que el segmento pequeño quede hacia arriba y nos alejamos del edificio una distancia D hasta conseguir tener orientados los dos extremos de la pieza con la parte superior del edificio.

De esta forma se tiene:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{a} = 1$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2}$$

Luego:

$$\frac{y}{x} = 1 \qquad [1]$$

$$\frac{y}{x + D} = \frac{1}{2} \qquad [2]$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones [1] y [2], se tiene:

$$x = \frac{x + D}{2}$$

$$2x = x + D$$

$$x = D$$

y por tanto:

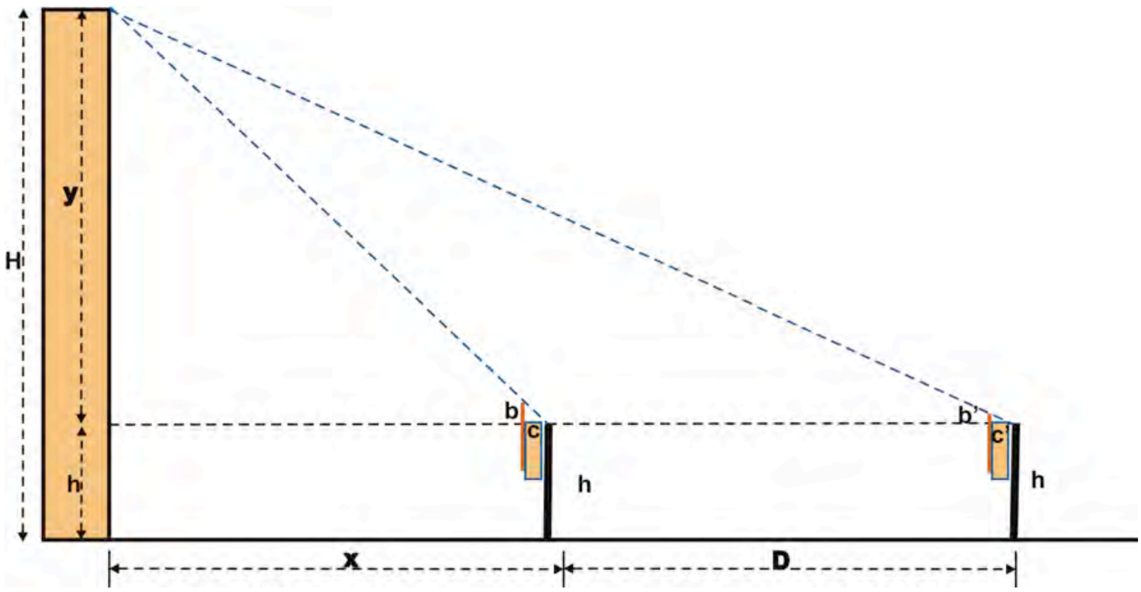
$$y = D \quad H = D + h$$

3.1.4. Con una tablilla de madera y un listón.

Material: Se utilizó una tablilla de madera de 10 cm de ancho (para hacer de forma rápida los cálculos) y un listón de madera.

Para medir la altura del edificio procedemos de la siguiente forma:

a) Se sitúa el observador a una distancia aleatoria de la fachada y con ayuda de la tablilla, desplaza el listón por su costado hasta conseguir tener en la visual el extremo de la tablilla, del listón y el extremo del edificio. Midiendo la longitud **b** entre la longitud **c**, se obtiene el ángulo de elevación.



b) Nos alejamos del edificio una distancia D y se repite la observación.
c) Se realizan los mismos cálculos que el apartado 3.1.2.

3.2. MEDIDAS OBTENIDAS

3.2.1. Medidas con los cuatro procedimientos anteriores

Con los procedimientos anteriormente descritos se realizaron dos sesiones en las que se registraron las siguientes medidas:

	Espejo	**Goniómetro**	**Altímetro**	**Pieza de madera**	**Altura media**
1ª Medición	8,50 m	10,80 m	10,80 m	17,50 m	11,9
2ª Medición	8,70 m	9,50 m	10,25 m	17,35 m	11,45
Media	8,6 m	10,15 m	10,525 m	17,425 m	**11,675 m**

Aceptamos que la altura del edificio está en torno a 11,68 m con una desviación típica de 3,42 m y con un coeficiente de variación del 29% que nos deja la estimación en el límite de una dispersión muy grande (30%).

3.2.2. Medidas con una estación total

¿QUÉ ES UNA ESTACIÓN TOTAL?

Se utilizó la estación total Leica TC 407.
Se denomina **estación total** a un instrumento electro-óptico utilizado en topografía, cuyo funcionamiento se apoya en la tecnología electrónica. Consiste en la incorporación de un distanciómetro y un microprocesador a un teodolito electrónico.
Algunas de las características que incorpora, y con las cuales no cuentan los teodolitos, son una pantalla alfanumérica de cristal líquido (LCD), leds de avisos, iluminación independiente de la luz solar, calculadora, distanciómetro, trackeador (seguidor de trayectoria) y la posibilidad de guardar información en formato electrónico, lo cual permite utilizarla posteriormente en ordenadores personales. Vienen provistas de diversos programas sencillos que permiten, entre otras capacidades, el cálculo de coordenadas en campo, replanteo de puntos de manera sencilla y eficaz y cálculo de acimutes y distancias.

FUNCIONAMIENTO

Vista como un teodolito, una estación total se compone de las mismas partes y funciones. El estacionamiento y verticalización son idénticos, aunque para la estación total se cuenta con niveles electrónicos que facilitan la tarea. Los tres ejes y sus errores asociados también están presentes: el de verticalidad, que con la doble compensación ve reducida su influencia sobre las lecturas horizontales, y los de colimación e inclinación, con el mismo comportamiento que en un teodolito clásico, salvo que el primero puede ser corregido por software, mientras que en el segundo la corrección debe realizarse por métodos mecánicos. El instrumento realiza la medición de ángulos a partir de marcas realizadas en discos transparentes. Las lecturas de distancia se realizan mediante una onda electromagnética portadora con distintas frecuencias que rebota en un prisma ubicado en el punto y regresa tomando, el instrumento, el desfasaje entre las ondas. Algunas estaciones totales presenta la capacidad de medir "a sólido", lo que significa que no es necesario un prisma reflectante. Este instrumento permite la obtención de coordenadas de puntos respecto a un sistema local o arbitrario, como también a sistemas definidos y materializados. Para la obtención de estas coordenadas el instrumento realiza una serie de lecturas y cálculos sobre ellas y demás datos suministrados por el operador. Las lecturas que se obtienen con este instrumento son las de ángulos verticales, horizontales y distancias, utilizando en esta ultima Otra particularidad de este instrumento es la posibilidad de incorporarle datos como coordenadas de puntos, códigos, correcciones de presión y temperatura, etc. La precisión de las medidas es del orden de la diezmilésima de gonio en ángulo y de milímetros en distancias, pudiendo realizar medidas en puntos situados entre 2 y 5 kilómetros.

CARACTERÍSTICAS

Con estos instrumentos ya no existen puntos de medición inaccesibles. Miden de manera rápida y precisa y se pueden soslayar cualquier impedimento en la obra. Al ser el rayo láser visible resulta ideal para marcar.

Un compensador totalmente automático de dos ejes se encarga de nivelar con precisión el instrumento garantizando la perfecta horizontalidad de su plano principal. En aplicaciones sobre plataformas móviles se puede desactivar el compensador.

Todos los modelos llevan una interfaz serie (RS232) que permite intercambiar fácilmente los datos registrados entre el instrumento y el ordenador. Los filtros creados por el usuario permiten la salida de datos a medida de las necesidades individuales.

Gracias a la plomada láser el centrado sobre el punto del suelo es muy sencillo. La intensidad del rayo se puede ajustar gradualmente para garantizar la visibilidad óptima también en condiciones de luz críticas. Se ahorra el tiempo que requería el centrado con la plomada óptica.

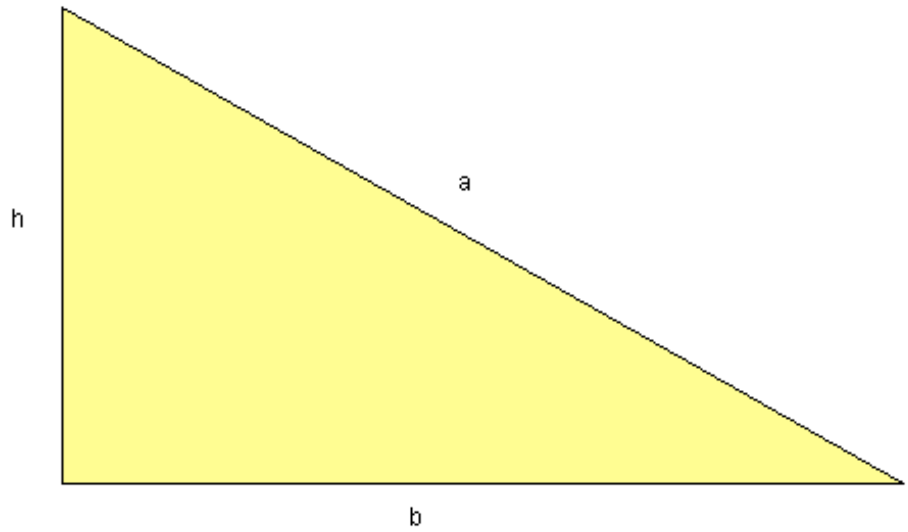
La función «Direct.dxf» permite exportar los datos directamente en formato DXF desde el mismo instrumento para su lectura en Auto CAD® o transferirlo al PC sin pasos intermedios.

Las coordenadas, códigos y números de puntos se pueden guardar en diferentes capas.

La tecnología PinPoint y el potente láser visible de gran exactitud ofrecen el más alto grado de puntería y precisión.

Medidas

A partir de unos datos que nos da la estación total sobre la horizontal (b) y la distancia entre el punto de medición y un punto situado en el borde del edificio (a), hallamos mediante el teorema de Pitágoras la altura del edificio (h).



<u>Datos</u>:
b = 21.885 m
a = 24.684 m
$a^2 = b^2 + h^2$

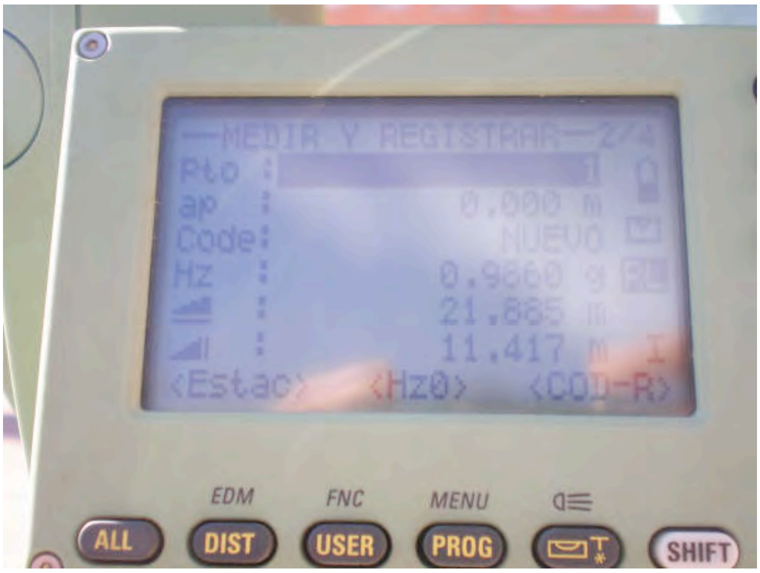
<u>Procedimiento:</u>
$h^2 = a^2 - b^2$
$h = \sqrt{a^2 - b^2}$
$h = \sqrt{24684^2 - 21885^2}$
h = 11,417 m

El edificio mide 11,417 m

3.3 CONCLUSIONES SOBRE LA COMPARACIÓN DE MEDIDAS

Comparando las mediciones realizadas con la estación total (11.417 m), aparato muy preciso y con margen de error mínimo, y las realizadas con aparatos caseros (11.675 m), hechos por nosotras, comprobamos que el margen de error que hay entre ambas mediciones es de:

11.675 – 11.417 = 0.258 m (25.8 cm, un error mínimo).



4. CONCLUSIONES

La principal finalidad de este trabajo era conocer la medida de una distancia inaccesible: la altura de un edificio, en este caso nuestro instituto.

El trabajo en equipo que requiere esta investigación y la citación de las fuentes utilizadas, respetando los derechos de autor, han sido partes fundamentales en este trabajo.
Cabe destacar la entrega que han tenido los estudiantes de topografía al facilitarnos una estación total y concedernos una entrevista en la que pudimos plantearles todos los interrogantes surgidos durante al investigación, formando así una parte importante del trabajo.

5. BIBLIOGRAFÍA

ARIAS CABEZAS, José María y MAZA SÁEZ, Ildefonso. *Matemáticas B 4* (libro de texto). Sevilla, Algaida Editores, 2005.

KLINE, Morris. *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I.* Madrid, Alianza Editorial, 1992.

PERELMAN, Yakov. *Matemáticas recreativa.* Madrid, Mir Ediciones, 1979.

"Estación total". En Instop.es [en línea] <http://www.instop.es/estatotales/tps_407_oferta.php> [consulta: 24-02-07]

"Trigonometría". En Wikipedia.org [en línea] <http://es.wikipedia.org/wiki/Estaci%C3%B3n_total> [consulta: 10-02-07]

"Trigonometría" transmitido de forma oral por cuatro estudiantes de Topografía de la Universidad Politécnica de Madrid: Paloma Sánchez, Javier del Río, María del Mar Mora y Alejandro Sáenz en Madrid a 6 de Febrero de 2007, 15 de Febrero de 2007 y 1 de Marzo de 2007.

Software gratuito GeoGebra.

6.ANEXO I

ENTREVISTA SOBRE TOPOGRAFÍA

Hemos realizado una entrevista a dos estudiantes de tercer año de topografía de la universidad Politécnica de Madrid.
Los estudiantes se llaman Paloma Sánchez y Javier del Río y pedimos una entrevista con ellos a la que accedieron de buen gusto.

¿Qué es la topografía?

Es el arte y ciencia de representar las formas de la Tierra.

¿Qué trabajos tiene un topógrafo?

1. En obra: ingeniería civil y edificación.
2. Catastros: determinación de límites de una parcela.
3. SIG: sistemas de información geográfica.
4. Teledetección: imágenes de satélite
5. Fotogrametría: representación de los objetos reales a partir de imágenes fotográficas.
6. Cartografía
7. Topografía industrial

¿Qué aparatos son los más utilizados en topografía?

Niveles, GPS, estaciones totales....

¿Qué es un teodolito?

Es un instrumento de medida de ángulos verticales y horizontales. Ya no se utiliza tanto, pero se utiliza en las estaciones totales que miden distancias además de ángulos.

¿Hay relación entre las matemáticas y la topografía?

La topografía es todo de matemáticas, su base es la trigonometría.; la topografía es geometría, de hecho los topógrafos se llaman también geómatros.

¿Cómo podemos medir distancias y ángulos y con qué aparatos?

Con la estación total y el GPS, midiendo longitudes de onda.